EN BADEKARSHVIRVELS ANATOMI

Vi ved alle, at der dannes en hvirvel og et dyk i overfladen, når vandet løber ud af et badekar, men hvordan ser overfladen og strømningen ud?

A. Andersen (Cornell University, Department of Theoretical and Applied Mechanics, USA), T. Bohr (Danmarks Tekniske Universitet, Institut for Fysik), B. Stenum (Forskningscenter Risø, Afd. for Optik og Plasma Forskning), J. Juul Rasmussen (Forskningscenter Risø, Afd. for Optik og Plasma Forskning), B. Lautrup (Københavns Universitet, Niels Bohr Institutet) og M. Ernebjerg (Harvard University, Department of Physics, USA).

Strømninger med en fri overflade forekommer mange steder i naturen og i vores dagligdag. Bølger på havet, et strømmende vandløb og en vanddråbe, der rammer en vandpyt, er alle eksempler på strømninger med en fri overflade. Figur 1 viser Ando Hiroshige's billede "Hvirvel ved Awa", som på smukkeste vis illustrerer hvor komplekse strømninger med en fri overflade kan være. Centralt i Hiroshige's billede er en intens hvirvel, der ligner en overdimensioneret udgave af den roterende strømning, som dannes når vandet løber ud af et badekar eller en vask fyldt med vand. En sådan badekarshvirvel, hvor dykket i den fri overflade gør strømningen let at se, er måske det mest velkendte eksempel på en hvirvel. Til trods for dette er fænomenet stort set ikke beskrevet i faglitteraturen, og overraskende nok finder man i lærebøger om hydrodynamik ikke svar på hvilken form dykket i overfladen har og hvordan strømningen ser ud over udløbet. Vi har undersøgt en badekarshvirvel i en roterende beholder eksperimentelt og teoretisk, og vi beskriver her den fri overflade og den underliggende strømning.

EKSPERIMENT

Figur 2 viser en skitse af eksperimentet, som består af en cylindrisk beholder med et lille cirkulært udløb i centrum af beholderens bund. Beholderen er fyldt med vand, som strømmer ud af udløbet drevet af tyngdekraften og efterfølgende pumpes tilbage i beholderen via en tilledning ved beholderens væg umiddelbart over bunden. I eksperimentet holdes vandstanden ved beholderens væg konstant, og vi undersøger således en tidsuafhængig strømning i modsætning til den tidsafhængige strømning i et rigtigt badekar, der tømmes for vand. Beholderen roteres med konstant rotationshastighed om den lodrette akse gennem centrum af bunden. Dybden af dykket i overfladen afhænger af vandstanden, udløbets radius og beholderens rotationshastighed. I eksperimentet holder vi både vandstanden og udløbets radius konstant og varierer beholderens rotationshastighed.

Figure 1: Ando Hiroshige's billede "Hvirvel ved Awa" er lavet omkring 1856 og viser en voldsom hvirvelstrømning tæt ved et klipperev ud for Japan's kyst. Hvirvler som denne er typisk fremkaldt af tidevandsstrømninger.

I eksperimentet roterer hvirvlen i samme retning som beholderen, og vi bestemmer således selv om hvirvlen skal rotere med eller mod uret. Man hører ofte, at Jorden's rotation får vand, der løber ud af et rigtigt badekar, til at danne en hvirvel som set oppefra roterer mod uret på den nordlige halvkugle og med uret på den sydlige halvkugle. Det er rigtigt, at Coriolis kraften fra Jorden's rotation får store hvirvler i atmosfæren til at rotere på denne måde, men for en hvirvel i et almindeligt badekar spiller Jorden's rotation ingen rolle for rotationsretnigen. I et almindeligt badekar er rotationsretningen derimod bestemt af karrets geometri og den bevægelse der er i vandet før bundproppen i karret hives op. For at se effekten af Jorden's rotation på en almindelig badekarshvirvel skal man som amerikaneren Shapiro for 40 år siden udføre et velkontrolleret eksperiment og vente i omkring et døgn for at sikre at badevandet er faldet helt til ro inden udløbet åbnes [1].

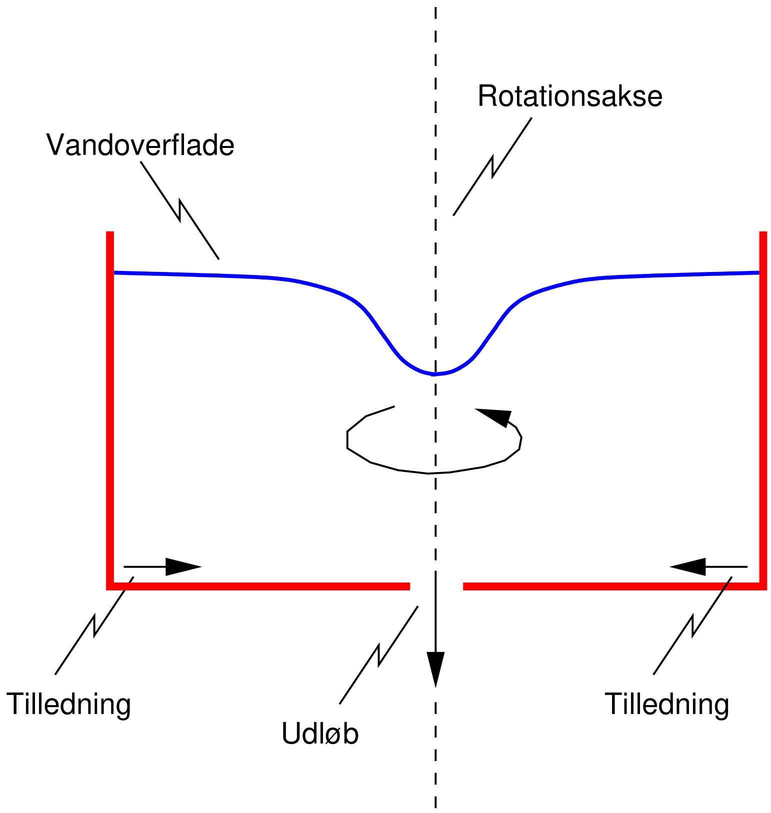


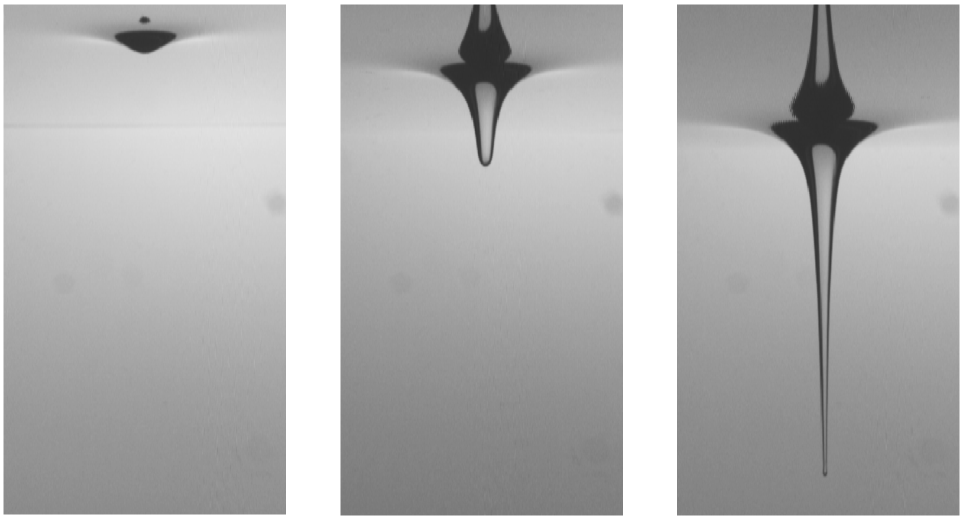
Figure 2: Den eksperimentelle opstilling. Den cylindriske beholder er fyldt med vand, der løber ud af hullet i centrum af beholderens bund drevet af tyngdekraften og pumpes tilbage i beholderen via en ydre tilledning ved beholderens væg. Beholderen roteres med konstant rotationshastighed, og der dannes en intens hvirvel med et kraftigt dyk i vandoverfladen over udløbet.

DYKKET I OVERFLADEN

Figur 3 viser målte overfladeprofiler, som er optaget gennem beholderens gennemsigtige væg med et digitalt videokamera. I alle tre tilfælde er udløbets radius 1 mm, beholderens radius 20 cm og vanddybden ved beholderens væg 11 cm. Billede (a) er optaget ved en rotationshastighed på 6 rpm (omdrejninger per minut), (b) ved 12 rpm og (c) ved 18 rpm. Billederne viser et udsnit, som er 4.0 cm (vandret) $\times$ 7.2 cm (lodret) med den nedre kant af billedet 4.2 cm over udløbet. Dybden af dykket i overfladen bliver større når rotationshastigheden forøges, og man bemærker, at dykket har en nåleagtig spids ved 18 rpm. Ved højere værdier af rotationshastigheden er spidsen af dykket i overfladen ikke længere stabil. Luftbobler løsrives fra spidsen og trækkes ned mod udløbet af det nedstømmende vand omkring dem som vist i figur 4. Når rotationshastigheden forøges yderligere, vokser frekvensen hvormed boblerne løsrives, og for meget høje rotationshastigheder når den luftfyldte hvirvelkerne hele vejen ned til udløbet.

STRØMNINGEN

Strømningen i badekarshvirvlen er overraskende kompleks med flere forskellige karakteristiske områder. Figur 5 viser en overlejring af to visualiseringer af strømningen, som er lavet ved at tilsætte fluorescerende farve



(a) (b) (c)

Figure 3: Badekarshvirvlen i en roterende cylindrisk beholder med et udløb i centrum af bunden. Vandet i det centrale område roterer hurtigt, og dybden af dykket i overfladen bliver større, når beholderens rotationshastighed forøges. Billede (a) er optaget ved 6 rpm, (b) ved 12 rpm og (c) ved 18 rpm. Strukturerne øverst på billederne skyldes reflektioner i vandoverfladen.

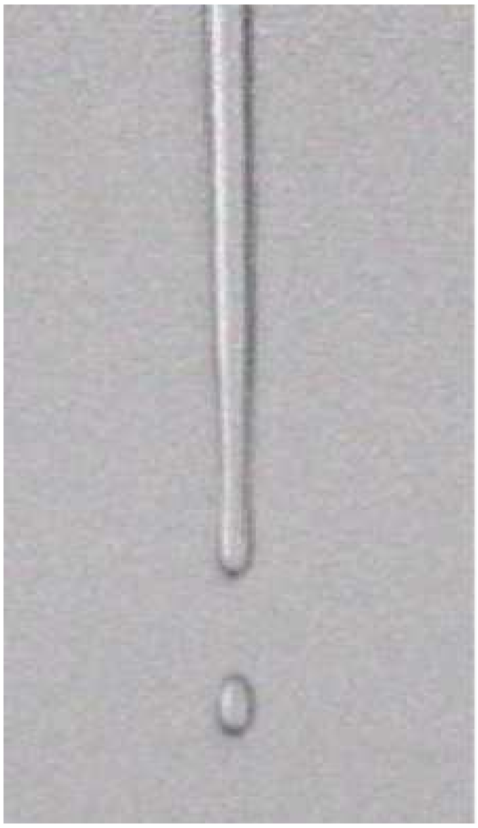


Figure 4: Nærbillede af spidsen af overfladedykket. Spidsen er ustabil når beholderens rotationshastighed er høj. En luftboble er revet løs fra spidsen og bliver trukket ned mod udløbet af det nedstrømmende vand omkring den.

hhv. ved overfladen (rød) og ved tilledningen ved bunden (grøn). Parametrene i figur 5 svarer til situationen i figur 3(b) ved 12 rpm. Beholderens bund og udløbet ses nederst og dykket i overfladen øverst i billedet.

Visualiseringen med den røde farve viser, at nedstrømningen over udløbet er lokaliseret i et snævert område, der ligner et "nedløbsrør" fra overfladelaget til udløbet. De fleste vil sikkert forvente, at det meste af det udstrømmende vand kommer via dette nedløbsrør, som anatomisk set er badekarshvirvlens spiserør, men i eksperimentet er det derimod således, at kun en lille brøkdel af det udstrømmende vand kommer fra overfladelaget, og at det meste af udstrømningen sker via det såkaldte Ekmanlag ved bunden.

Ekmanlaget eller grænselaget ved bunden af beholderen har konstant tykkelse, og det udgør i eksperimentet et millimeter tyndt lag, hvor vandet strømmer indefter. Tæt ved udløbet presses en stor del af det opefter pågrund af de specielle strømningsforhold ved bunden i den roterende beholder, og resten strømmer direkte ud af udløbet. Dette er visualiseret med den grønne farve i figur 5, som er tilsat tæt ved bunden ved beholderens væg. Denne form for opstrømning i et roterende system kaldes Ekman pumpning, og den spiller en vigtig rolle for strømningen i atmosfæren og oceanerne, der i høj grad er styret af Coriolis kraften fra Jorden's rotation. I området over Ekmanlaget er strømningen stort set uafhængig af højden. Her er der næsten ingen indstrømning, og vandet roterer med en hastighed, som i det medroterende referencesystem er omvendt proportional med radius. Skitsen af strømlinjerne i figur 6 viser de forskellige områder af badekarshvirvlen med opstrømningen fra Ekmanlaget og nedstrømningen fra overfladelaget.

MODEL AF BADEKARSHVIRVLEN

Vi er nu klar til at sammenfatte vores beskrivelse af badekarshvirvlen. I den største del af beholderen er der næsten kun roterende bevægelse - radielle og vertikale hastigheder er af størrelsesorden mm/s. Nede ved bunden findes Ekmanlaget, hvor vandet strømmer indefter imod udløbet med hastigheder af størrelsesorden cm/s og enten direkte ned i udløbet eller op langs hvirvelkernen. Den centrale del, den hurtigt roterende hvirvelkerne, kan beskrives ved en nedløbsrørsmodel, hvor de vertikale hastigheder er af størrelsesorden m/s og nedadrettede. Her er væskens træghed eller *viskositet* vigtig fordi den høje rotationsfrekvens (typisk 100 gange beholderens rotationsfrekvens) får væskedelene til at gnide mod hinanden. Inden i nedløbsrøret finder man, at rotationshastigheden og den radiale hastighed er stort set uafhængige af højden, mens den vertikale hastighed aftager lineært med højden.

Tilstedeværelsen af den fri overflade gør den teoretiske analyse af badekarshvirvlen mere kompliceret end f.eks. analysen af strømningen i et rør med en

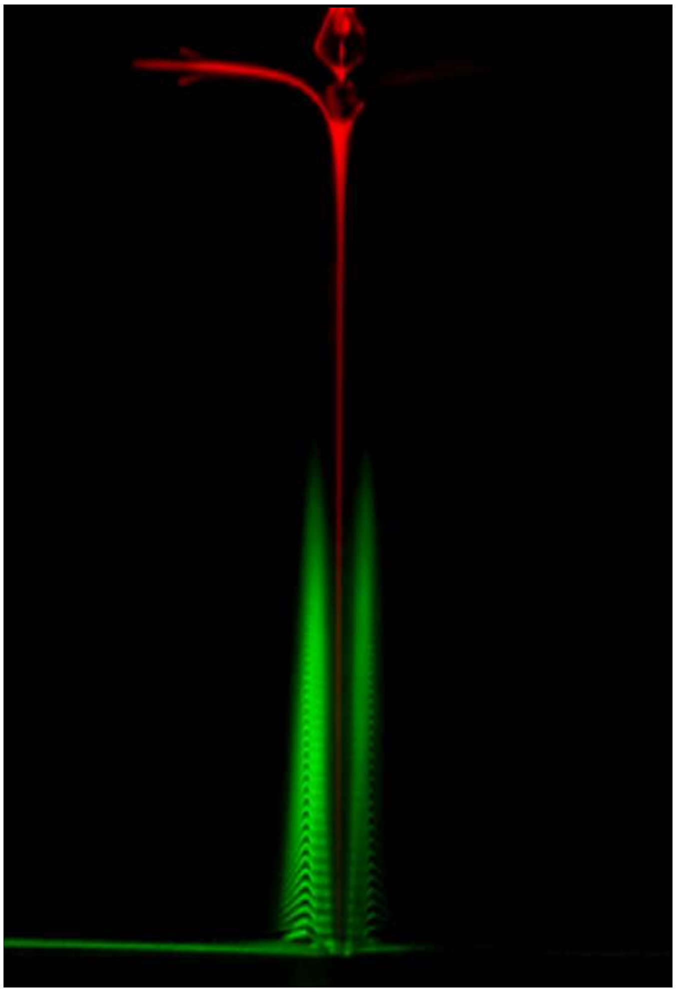


Figure 5: Overlejring af to visualiseringer af strømningen, som er lavet ved at tilsætte fluorescerende farve hhv. ved overfladen (rød) og ved tilledningen ved bunden (grøn). Den grønne farve strømmer indefter i Ekmanlaget ved bunden og op omkring "nedløbsrøret" med den røde farve fra overfladelaget. Det røde mønster over overfladen skyldes reflektioner fra overfladen.

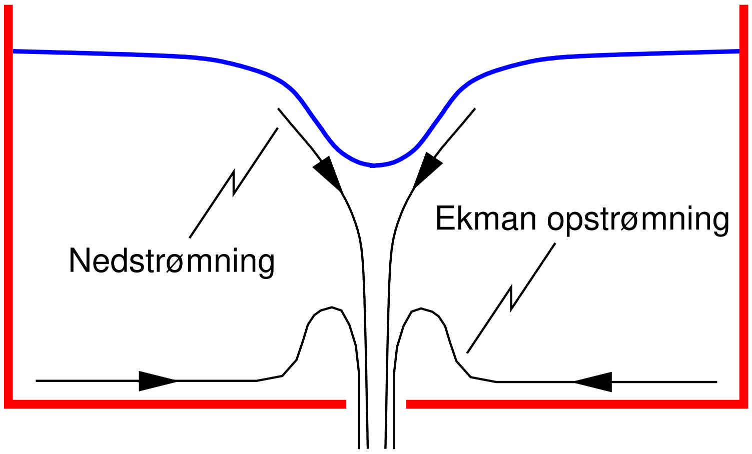


Figure 6: Skitse af strømlinjerne og dykket i vandoverfladen over udløbet. Vandet strømmer indefter i Ekmanlaget ved bunden og derefter op udenfor den centrale hvirvelkerne med nedstrømning fra overfladelaget.

fast overflade, idet den fri overflade ikke a priori er kendt, men derimod skal findes som en del af løsningen af strømningsproblemet. Men antager vi, at strømningen i hvirvelkernen, selv med tilstedeværelsen af den fri overflade, stadig kan beskrives ved nedløbsrørsmodellen, ledes vi til et sæt ligninger for overfladehøjden og rotationshastigheden, som blev udledt for 20 år siden af amerikaneren Thomas Lundgren [2]. Lundgren udledte ligningerne under betingelser, der ikke er opfyldt for vores eksperiment, idet han antog, at udstrømningshastigheden er lille i forhold til faldhastigheden, $\sqrt{2gH}$, hvor g er tyngdeaccelerationen og H er vanddybden. I vores eksperiment er de to hastigheder af samme størrelsesorden. Men her kommer imidlertid vores nedløbsrørsmodel til hjælp og viser at Lundgrens ligninger kan optræde også ved store udstrømningshastigheder.

I Lundgrens oprindelige ligninger er overfladespænding ikke medtaget. Er det en god approksimation? Figur 7 viser numeriske løsninger af Lundgren's model med og uden overfladespænding sammenlignet med de eksperimentelle resultater ved 12 rpm. Figur 7(a) viser overfladeprofilen, h, og figur 7(b) rotationshastigheden, v, som funktion af radius, r. Rotationshastigheden er vist i referencesystemet, som roterer med beholderen. De blå kurver viser løsningen af Lundgren's model med overfladespænding, de grønne kurver løsningen uden overfladespænding og de røde firkanter de

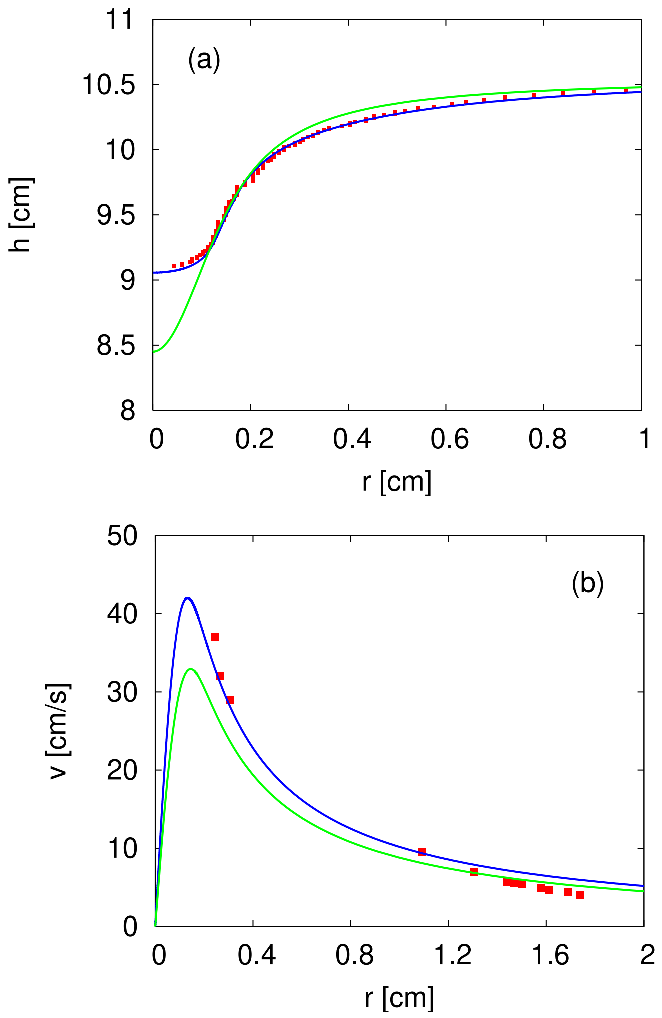


Figure 7: Løsning af Lundgren's model med overfladespænding (blå) og uden overfladespænding (grøn) sammenlignet med de eksperimentelle resultater (rød) ved 12 rpm. Billede (a) viser overfladeprofilen og (b) rotationshastigheden i det medroterende referencesystem som funktion af radius.

målte profiler. Løsningen med overfladespænding stemmer godt overens med målingerne, hvorimod løsningen uden overfladespænding overestimerer dybden af det centrale dyk i overfladen med omkring 70%. Når dykket i overfladen blot er et par centimeter dybt som ved 12 rpm, er det således muligt at beskrive overfladeformen og strømningen med Lundgren's model, når man tager hensyn til opstrømningen fra Ekmanlaget og overfladespændingen.

GODE OG DÅRLIGE DAGE FOR BADEKARSHVIRVLER

Det er lykkedes os at nå til vejs ende - i hvert fald hvad angår stationære badekarshvirvler. Vi har opnået en kvalitativ forståelse af de væsensforskellige områder, som tilsammen bygger strømningen op, og vi har fundet et sæt ligninger, som beskriver strømningen selv med en fri overflade. I vores beskrivelse afhænger overfladedykkets form og størrelse eksplicit af viskositeten, som er vigtig både i nedløbsrøret og i Ekmanlaget. Kan man observere denne afhængighed? Umiddelbart er det besværligt at ændre viskositeten, da det kræver en anden væske, som normalt også vil introducere andre forskelle. Men vi gjorde tilfældigt den opdagelse, at badekarshvirvler har "gode" og "dårlige" dage - altså, at overfladedykkets dybde, med præcis de samme ydre betingelser og samme væske, afhang af, hvilken dag vi målte dybden! Vi gættede på, at det måtte være temperaturforskelle, som gav anledning til disse variationer. Og ganske rigtig fandt vi en klar afhængighed af temperaturen. Men, hvordan kan temperaturen komme ind i billedet? Jo, den ændrer vandets viskositet, jo varmere det er, jo mere letflydende bliver vandet, og jo dybere bliver dykket i overfladen. Så viskositeten spiller en vigtig rolle for badekarshvirvlen!

DANNELSEN AF INTENSE HVIRVLER

Der er stadig masser af uafklarede problemer ved forståelsen af hurtigt roterende strømninger og badekarshvirvler i særdeleshed. Et meget væsentligt problem er, hvordan hvirvlen dannes i et stationært kar. Dannelsesprocessen er en slags "dynamoeffekt", hvor uordnet impulsmoment, som er fordelt i væsken, efterhånden, pga. indstrømningen, samles i centrum og igangsætter en intens rotation. Det kunne være spændende og instruktivt at forstå disse processer og deres betydning for lignende, men mere voldsomme effekter i f.eks. tornadoer.

References

[1] A. H. Shapiro, Bath-Tub Vortex, Nature **196**, 1080 (1962).

[2] T. S. Lundgren, The vortical flow above the drain-hole in a rotating vessel, J. Fluid Mech. **155**, 381 (1985).

[3] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. Juul Rasmussen og B. Lautrup, Anatomy of a Bathtub Vortex, Phys. Rev. Lett. **91**, 104502 (2003).